Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}$

Diremo che $f(x)$ è derivabile su A se essa è derivabile in ogni punto di A

Teorema

$f(x)$ derivabile in x_0 $\Longrightarrow$ $f(x)$ continua in x_0

Dim

(T (Tesi)

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0$$

Infatti:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Non vale il viceversa:

Esempio $f(x) = |x|$

in $\boxed{x_0 = 0}$ $f(x)$ è continua $\lim_{x\to 0} |x| = |0| = f(0) = f(x_0)$

Quindi $f(x)$ è continua in $x_0 = 0$. Mentre $f(x)$ non è derivabile in $x_0 = 0$. Infatti

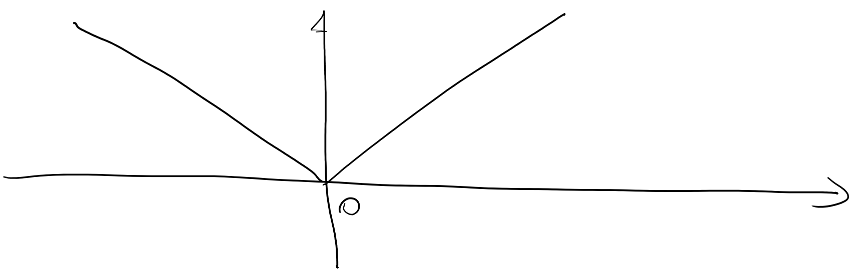
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} =$$

$$= \begin{cases} \to \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ \to \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Rightarrow f(x)=|x| \text{ non è derivabile in } x_0 = 0$$

Graficamente $f(x) = |x|$



Nota che in $x_0 = 0$ il grafico della funzione $f(x) = |x|$ ha più rette tangenti (questo è il motivo della non derivabilità)

Teorema (Fermat)

Sia $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in]a,b[$

Se x_0 è un estremo relativo

$$\Longrightarrow f'(x_0) = 0$$

Dim

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Supponiamo x_0 sia max rel

$\exists\, \delta > 0 : \quad f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

ossia $\boxed{f(x) - f(x_0) \le 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[}$

Da cui

$$\to \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$$

Da cui

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{\overset{(-)}{f(x)-f(x_0)}}{\underset{(-)}{x-x_0}} \geq 0 \\ \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{\overset{(-)}{f(x)-f(x_0)}}{\underset{(+)}{x-x_0}} \leq 0 \end{cases}$$

$x \to x_0^-$ significa $x < x_0$ ossia $x - x_0 < 0$

$\Rightarrow$ $f'(x_0)$ deve quindi essere un numero sia positivo che negativo, ossia $f'(x_0) = 0$ ∎

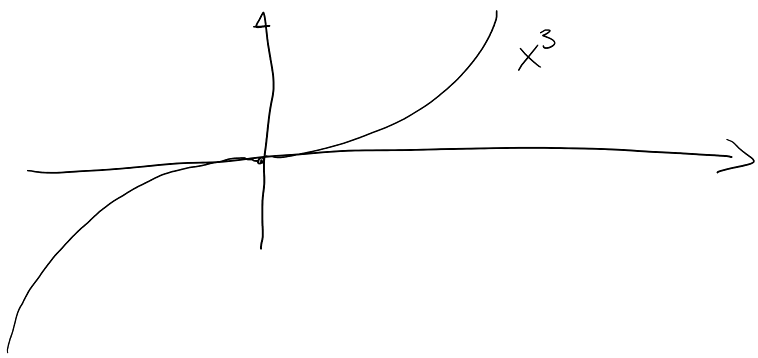
Nota che il teorema di Fermat non ha il viceversa

Ossia, può accadere che $f'(x_0) = 0$ senza che x_0 sia un estremo relativo

<u>Esempio</u> $f(x) = x^3$

$$f'(x) = 3x^2 \qquad \text{otteniamo} \quad f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$$

Ma $x_0 = 0$ non è estremo relativo per $f(x) = x^3$



<u>Teorema</u> (Rolle)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$ tale che

$$f(a) = f(b)$$

$$\Longrightarrow \exists\, c \in\,]a,b[\quad f'(c) = 0$$

__Teorema__ (Cauchy)

Siano $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue su $[a,b]$
derivabili su $]a,b[$

Supponiamo che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Allora $\exists c \in]a,b[$ tale che

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Caso particolare $g(x) = x \qquad g'(x) = 1 \quad \forall x$

__Corollario__ (Teorema di Lagrange)

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$
e derivabile su $]a,b[$

$$\boxed{\text{Allora } \exists c \in]a,b[: \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$$

Graficamente il teorema di Lagrange ci dice che comunque siano i valori di $f(a)$ e $f(b)$ (non necessariamente uguali) esiste sempre un punto c tale che la __retta__ __tangente__ al grafico di $f(x)$ in $(c, f(c))$ è __parallela__ alla __retta__ __passante__ per i punti __$(a, f(a))$__, __$(b, f(b))$__

__Conseguenze di Lagrange__

① Se $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile su $]a,b[$:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$$
$$\Longrightarrow f(x) = \text{costante}$$

__Dim__ (Tesi) se prendo $x_1, x_2 \in]a,b[\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$?

uso Lagrange alla funzione

$f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$

① $f(x)$ è continua su $[x_1, x_2]$ poiché è derivabile su (a,b)

② $f(x)$ è derivabile su $]x_1, x_2[$ " " "

Da Lagrange $\Rightarrow \exists\, c \in]x_1, x_2[$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \iff f(x_2) - f(x_1) = 0$$

$$\iff f(x_2) = f(x_1)$$

② <u>Teorema</u> (Monotonia attraverso derivata)

Sia $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$f(x)$ è monotona crescente $\overset{①}{\iff} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$f(x)$ è monotona decrescente $\overset{②}{\iff} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

<u>Dim</u> ①

(Ip) $f(x)$ è monotona crescente

ossia $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$

Tesi $\forall x_0 \in]a,b[\quad f'(x_0) \geq 0$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \begin{cases} \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)^{\,\ominus}}{x - x_0^{\,\ominus}} \geq 0 \\[2ex] \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)^{\,\oplus}}{x - x_0^{\,\oplus}} \geq 0 \end{cases}$$

Studio il segno ; se $x \to x_0^-$ significando $x < x_0$

$\Rightarrow \quad x - x_0 < 0$ (i)

$f(x) \leq f(x_0)$ (ii) (per monotonia crescente)

$\iff f(x) - f(x_0) \leq 0$

Se invece $x \to x_0^+$, significa che $x > x_0$

$\Rightarrow$ (i) $x - x_0 > 0$

Monotonia (ii) $f(x) \geq f(x_0) \iff f(x) - f(x_0) \geq 0$

$\Longrightarrow f'(x_0) \geq 0$ OK

Viceversa: (Ip) $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Tesi $\forall x_1, x_2 \in]a,b[$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Infatti usiamo Lagrange per $f: [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$

ovviamente $f(x)$ è continua su $[x_1, x_2]$ e derivabile su $]x_1, x_2[$

$\Rightarrow \exists c \in]x_1, x_2[$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) \geq 0$$ (Ip)

$$\iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

ma $x_2 - x_1 > 0 \xRightarrow{\text{segni concordi}} f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

$\Longrightarrow f(x)$ è monotona crescente

Corollario (utile per esercizi)

Sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile su (a,b) e $x_0 \in]a,b[$

Se $\exists \delta > 0$: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$

$\Longrightarrow$ x_0 è max rel

Analogamente $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0[$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]x_0, x_0+\delta[$

$\Longrightarrow$ x_0 è min rel

Applicazione del teorema di derivazione di funzioni inverse.

Def 1 Considero $f(x) = \operatorname{sen} x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

Notiamo che $f'(x) = \cos x \geq 0 \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\Longrightarrow$ $f(x) = \operatorname{sen} x$ è crescente in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Longrightarrow$ $f(x) = \operatorname{sen} x$ è iniettiva in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Infatti se $x_1 \neq x_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow x_1 < x_2$ (o al contrario)

$\Longrightarrow \operatorname{sen} x_1 < \operatorname{sen} x_2$

$\Longrightarrow \operatorname{sen} x_1 \neq \operatorname{sen} x_2$

Inoltre $\operatorname{sen} x$ è continua, dal teorema di Darboux

$$\operatorname{Im} \operatorname{sen} x = \left(\inf_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} f(x), \sup_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} f(x) \right)$$

$$= \left[f(-\tfrac{\pi}{2}), f(\tfrac{\pi}{2}) \right]$$ perché $f(x)$ cresce

$$= [-1, 1]$$

$\Longrightarrow$ $f(x) = \operatorname{sen} x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

è una funzione invertibile (iniettiva + suriettiva)

Si definisce $\arcsin y : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

come la funzione inversa di $\sin x\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

Analogamente, si definisce

$$\arccos y : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

come la funzione inversa di $\cos x : [0,\pi] \to [-1,1]$

Infine. Considero

$$f(x) = \tan x : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

Noto

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\overset{\to -1}{\sin x}}{\underset{\to 0^+}{\cos x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\overset{\to 1}{\sin x}}{\underset{\to 0^+}{\cos x}} = +\infty$$

$$\Longrightarrow \sup_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \tan x = +\infty \qquad \inf_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \tan x = -\infty$$

Per Darboux

$$\operatorname{Im} \tan x =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ $\tan x$ è suriettiva $: \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

Infine $\tan x$ è iniettiva

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

$\Longrightarrow$ $\tan x$ è crescente $\Longrightarrow$ $\tan x$ è iniettiva

$\Longrightarrow$ $\tan x : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ è invertibile

e si definisce

$$\arctan y : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

come l'inversa di $\tan x \big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

Formula

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{dove} \quad y_0 = f(x_0)}$$

Nel caso $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$ si ha $\quad y = f(x) = \tan x$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\tan x)'} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x =$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

Ossia

$$\boxed{f(y) = \arctan y \Longrightarrow f'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$$

Esercizio

$$\lim_{x \to +\infty} x^4 \operatorname{sen} x^{-3} = \lim_{x \to +\infty} x^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underset{\downarrow \, +\infty}{\cancel{x^4}} \; \underset{\to 1}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}}} \cdot \cancel{\frac{1}{x^3}} = +\infty$$

A parte

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\frac{1}{x^3}} = \quad \text{chiamo } z = \frac{1}{x^3} \quad \lim_{x \to +\infty} z = 0$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$$

Esercizio

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\underset{\downarrow}{5^x} + \underset{\downarrow}{5^{-x}}\right)^{-\sqrt{5}} \cdot \left(\underbrace{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\frac{1}{x}}\right) = 0$$

Esercizio

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left((\underset{\to 0}{5^{x}}) + (\underset{\to +\infty}{5^{-x}}) \right)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\text{sen}\, x + \text{sen} \frac{1}{x} \right)}_{\text{limitata}} = 0$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{(5^{x} + 5^{-x})^{\sqrt{5}}}_{\to +\infty}} \cdot \left(\text{sen}\, x + \text{sen} \frac{1}{x} \right)$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^{3}}}{\log(1+x^{2})} \overset{*}{=} \left(\frac{1 - \sqrt{1+0^{3}}}{\log(1+0^{2})} = \frac{0}{0} \text{ F.I.} \right)$$

Richiamo

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1 \\ &\lim_{z\to 0} \frac{(1+z)^{\alpha} - 1}{z} = \alpha \end{aligned}}$$

$$(*) = -\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^{3}} - 1}{\log(1+x^{2})} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^{3})^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{3}} \cdot \cancel{x^{3}} \, \frac{1}{\frac{\log(1+x^{2})}{x^{2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{x^{2}}} =$$

se
$$\begin{aligned} &z = x^{3} \Rightarrow \lim_{x\to 0} z = 0 \\ &y = x^{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} y = 0 \end{aligned}$$

$$= -\lim_{z\to 0} \underbrace{\frac{(1+z)^{\frac{1}{2}} - 1}{z}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{1}{\underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_{\to 1}} \lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{\to 0}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot 0 = 0$$

Esercizio

$$\lim_{x\to \dots} \frac{\log(x-1)}{} = \left(\frac{\log(2-1)}{} \right.$$

Esercizio $\lim_{x \to 2} \frac{\log(x-1)}{3^{x-2}-1} = \left(\frac{\log(2-1)}{3^{2-2}-1} = \frac{0}{0} \right)$

Penso ai lim not

$$\boxed{\begin{array}{l} ① \ \lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1 \\ ② \ \lim_{y \to 0} \frac{3^y - 1}{y} = \log 3 \end{array}}$$

Riscrivo

$$\lim_{x \to 2} \frac{\log(x-1)}{3^{x-2}-1} = \lim_{x \to 2} \frac{\log(1+[x-2])}{\frac{3^{x-2}-1}{x-2} \cdot (x-2)} =$$

chiamo $y = x-2$ $\lim_{x \to 2} y = 0$

$$= \lim_{y \to 0} \underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_{\to 1} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{3^y-1}{y}}_{\to \log 3}} = 1 \cdot \frac{1}{\log 3}$$

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{n + (-1)^n \cdot n + 5}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Scrivo $A = A_p \cup A_d$

dove $A_p = \left\{ \frac{2n+5}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \text{ pari} \right\}$

$$A_d = \left\{ \frac{5}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \text{ dispari} \right\}$$

$\left\{ \frac{\quad}{n^2+1} \right\}$

Cerco $\sup A_p$ perché $\frac{2n+5}{n^2+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Cerco maggiorante $x > 0$

$$\frac{2n+5}{n^2+1} \le x \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2n+5 \le xn^2 + x$$

$$-xn^2 + 2n + (5-x) \le 0$$

(P$_n$) $\boxed{x \cdot n^2 - 2n - (5-x) \ge 0}$

$$\Delta = 4 - 4x \cdot (-(5-x)) = 4\,[1 + x(5-x)]$$

$$= 4\,[1 - x^2 + 5x]$$

Se $\Delta > 0$ Sol $\cancel{n \le \frac{2-\sqrt{\Delta}}{2x}}$ NO $\cup$ $n \ge \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2x}$

Impongo Sol $= \mathbb{N}$

Ossia $n \ge \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2x} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longleftrightarrow \quad 0 \ge \frac{2+\sqrt{\Delta}}{2x} > 0$ mai

Quindi $\Delta \le 0$ Sol $= \mathbb{N}$ OK

$$\Delta = 4\,[1 - x^2 + 5x] \le 0 \qquad (x > 0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^2 - 5x - 1 \ge 0$$

$$\Delta = 25 + 16 = 41$$

NO

$\Delta = 25 + 16 = 41$

NO

Sol $\quad \cancel{x \leq \frac{5-\sqrt{41}}{2}} \cup x \geq \frac{5+\sqrt{41}}{2}$

$\Rightarrow \quad A_p^* = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{5+\sqrt{41}}{2} \right\}$

$\sup A_p = \min A_p^* = \frac{5+\sqrt{41}}{2}$

Domanda $\quad \frac{5+\sqrt{41}}{2} \in A_p$?

Cerco maggioranti $(x>0)$ per A_d

$$\frac{5}{n^2+1} \leq x \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(dispari)}$$

$$\frac{n^2+1}{5} \geq \frac{1}{x}$$

$$n^2+1 \geq \frac{5}{x}$$

$$n^2 + \left(1 - \frac{5}{x}\right) \geq 0$$

$$\Delta = 0^2 - 4\left(1 - \frac{5}{x}\right) = -4 + \frac{20}{x}$$

NO

se $\Delta > 0$ $\quad$ Sol $\quad \cancel{n \leq -\frac{\sqrt{\Delta}}{2}} \cup n \geq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

Impongo che $\quad$ Sol $= \mathbb{N}$ $\quad$ ossia

$$n \geq \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Leftrightarrow \quad 0 \geq \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\quad$ mai

Quindi $\quad (\Delta \leq 0)$ $\quad$ Sol $= \mathbb{N}$ $\quad$ (OK)

Quindi $\Delta \leq 0$ $\quad$ $Sol = \mathbb{N}$ $\quad$ OK

$$\iff -4 + \frac{20}{x} \leq 0$$

$$\frac{20}{x} \leq 4 \iff \frac{x}{20} \geq \frac{1}{4}$$

$$\iff x \geq \frac{20}{4} = 5$$

$$A_d^* = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$$

$$\Rightarrow \sup A_d = \min A_d^* = 5$$

Domanda $\quad 5 \in A_d$?

Concludo $\quad \sup A = \max \left\{ \frac{5+\sqrt{41}}{2} , 5 \right\}$

$$= \frac{5+\sqrt{41}}{2}$$

Analogamente

$$\inf A = \min (\inf A_p , \inf A_d)$$